5 Généralités sur les fonctions.

Livre p.42.

Objectifs :

- Notion de fonction
- Déterminer l'ensemble de définition d'une fonction
- Déterminer l'image d'un nombre, l'antécédent d'un nombre
- Comprenrde et savoir utiliser les notions de fonction paire, de fonction impaire.
- Tracer et utiliser la représentation graphique d'une fonction
- Résoudre graphiquement une équation, une inéquation

Aperçu historique :

*Le terme "fonction" est dû à **Leibniz** (1692, de **functio** :exécution), un mathématicien allemand qui a contribué à jeter les bases de l'analyse moderne. L'idée de fonction a d'abord été associée à une courbe du plan avant d'être considérée comme une combinaison d'opération sur une variable, ce qui peut être rapproché d'un algorithme.*

1. Quelques exemples

Exemple : **1 - Le banquier.**
Un banquier propose un livret d'épargne qui rapporte 3% d'intérêts par an.
A la fin de l'année chaque titulaire d'un tel livret reçoit en plus des intérêts la somme de 10 €.

1. Calculer la somme disponible après un an si on place 100 € en début d'année.
2. Même question pour un placement de 250 €.
3. Le banquier a 150 clients possédant un tel livret. S'il note x le montant placé en début d'année par un client, exprimer le montant $S(x)$ disponible après un an.

Réponses :

1. La somme disponible après un an est :
$$S = 100 + \frac{3}{100} \times 100 + 10 = 113€$$
2. La somme disponible après un an est :
$$S = 250 + \frac{3}{100} \times 250 + 10 = 267,50€$$
3. La somme disponible est :
$$S(x) = x + \frac{3}{100} \times x + 10 = 1,03x + 10$$

La somme disponible après un an $S(x)$ dépend de la valeur de x on dit que S est une **fonction** de x.

Avec un tableur : Dans un tableur, le banquier peut compléter une feuille de calculs comme celle-ci :

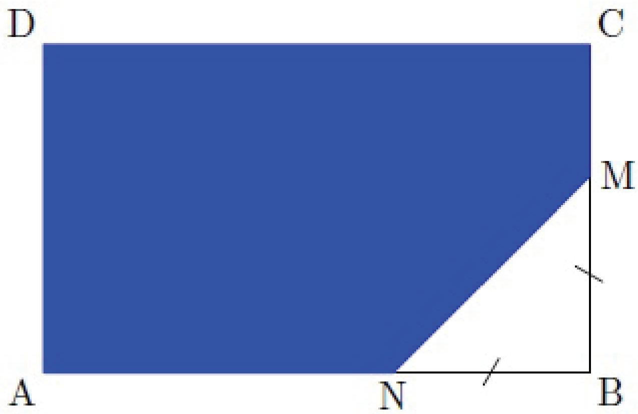
B3 | =A3+0,03*A3+10

	A	B	C	D	E
1					
2	Montant placé	Montant après un an			
3	100,00	113,00			
4	250,00	267,50			
5	500,00	525,00			
6	218,00	234,54			
7	23,00	33,69			
8	36 000,00	37 090,00			
9	230,50	247,42			
10					

Dans la cellule $B3$ on a écrit $A3+0,03^{*}A3+10$; puis on a recopié cette formule vers le bas.

Exemple 2 - Dans un rectangle.

On a tracé ci-dessous un rectangle $ABCD$ tel que $AD = 3$ cm et $AB = 5$ cm. M est un point du segment $[BC]$. N est le point de $[BA]$ tel que $BN = BM$.



1. Calculer l'aire délimitée par le pentagone $ANMCD$ lorsque $BM = 1$ cm.
2. Même question lorsque $BM = 2$ cm.
3. On pose maintenant $BM = x$. Exprimer l'aire $\mathscr{A}(x)$ de $ANMCD$ en fonction de x.

Réponses :

1. L'aire de $ANMCD$ est égale à l'aire de $ABCD$ moins l'aire de BMN. Donc :

$$\mathscr{A} = 5\times 3 - \frac{1\times 1}{2} = 14,5 \text{ cm}^2$$

2. De même :

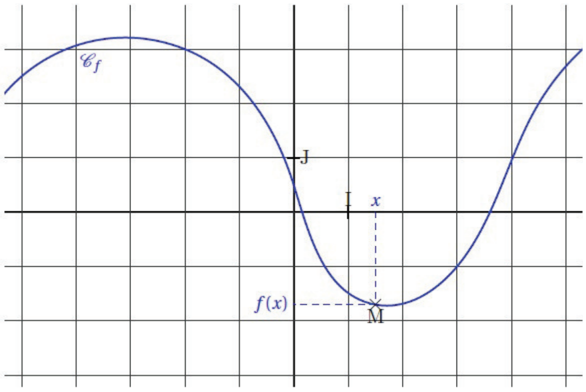
$$\mathscr{A}' = 5\times 3 - \frac{2\times 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

3. Si $BM = x$, l'aire de BNM vaut $\frac{x\times x}{2}$. Donc :

$$\mathscr{A}(x) = 5\times 3 - \frac{x\times x}{2} = 15 - \frac{1}{2}x^2$$

L'aire $\mathscr{A}(x)$ dépend de la valeur de x on dit que $\mathscr{A}$ est une **fonction** de x.

Exemple 3 - A partir d'une courbe.
Sur la figure ci-dessous, on a tracé une courbe dans un repère (voir chapitre **??**).



Plaçons A, B et C les points de la courbe d'abscisses respectives -2, 3 et $\frac{9}{2}$.
Lisons l'ordonnée de chacun des points A, B et C.
On a : $y_A = 3$, $y_B = -1$ et $y_C = 2$.
De même, pour tout point M d'abscisse x de la courbe, on peut lire son ordonnée y_M.
L'ordonnée de M dépend de x. On dit que c'est une **fonction** de x.

2. Vocabulaire : fonction, antécédent, image, ensemble de définition

Rappel : On note $\mathbb{R}$ (nombres réels) l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez pour l'instant (entiers, décimaux, rationnels, et irrationnels comme π ou $\sqrt{2}$ par exemple).

Définition 5.1 Définir une fonction f sur une partie D_f de l'ensemble $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque nombre réel $x \in D_f$ un **unique** nombre réel y.
On note :
$$\begin{array}{cccc} f & : & D_f & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$
x est **un antécédent de** y par la fonction f.
$y = f(x)$ est **l'image de** x par la fonction f.

Exemple 1 : Dans l'exemple de la courbe ci-dessus, si l'on note f la fonction représentée par la courbe :
Le nombre $x = -2$ a pour image le nombre $f(x) = 3$ (point$A$).
Un antécédent du nombre $y = -1$ est le nombre $x = 3$ (point$B$) ; on voit que le nombre 2 possède au moins un autre antécédent, égal approximativement à $0,6$..
Le nombre $y = 2$ a pour antécédent le nombre $x = \frac{9}{2}$ (point$A$), mais aussi environ $-0,8$.
Attention, la lecture graphique donne toujours des valeurs approchées.

Exemple 2 : Soit la fonction f définie pour tous les x compris entre -5 et 7 par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
Cela signifie que si on se donne une valeur de x comprise entre -5 et 7, on peut calculer son image par la fonction f grâce à l'expression donnée :

- on a : $f(-3) = (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1 = 9 + 6 - 1 = 14$;
- on peut dire aussi que l'image par f de 0 est -1 (car $f(0) = 0^2 - 2 \times 0 - 1 = -1$) ;
- on dit aussi 5 est un antécédent de 14 car $f(5) = 5^2 - 2 \times 5 - 1 = 14$.

Remarques :
1) Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$:
- pour chaque $x \in \mathscr{D}$, il n'existe qu'une seule image de x par f ;
- par contre un nombre y peut avoir plusieurs antécédents par la fonction f ;
- certains nombres n'ont pas d'antécédent ; par la fonction $f : x \mapsto f(x) = x^2$, le nombre -16 n'a pas d'antécédent, car un carré est toujours positif.
2) x est une variable que l'on peut remplacer par une autre lettre, par exemple $f : t \mapsto f(t)$.
3) $f(x)$ est un nombre, alors que f est une fonction.

Définition 5.2 Soit f une fonction numérique.
L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ s'appelle ensemble de définition de f et se note souvent $\mathscr{D}_f$. Les valeurs pour lesquelles on ne peut pas calculer $f(x)$ s'appellent valeurs interdites de la fonction f.

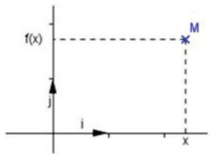
Exemples :

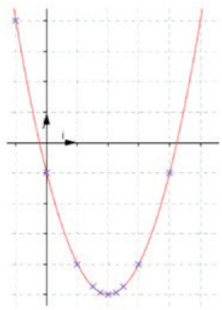
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x+3}{x-3}$.
  On ne peut pas calculer $f(x)$ si $x-3=0$: la division par 0 n'existe pas. Ainsi $x=3$ est une valeur interdite et l'ensemble de définition de la fonction f est : $\mathscr{D}_f =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x+2}$.
  On ne peut pas calculer la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Donc pour pouvoir calculer $g(x)$ il faut que $x+2 \geq 0$, c'est-à-dire que $x \geq -2$. Donc l'ensemble de définition de g est $\mathscr{D}_g = [-2; +\infty[$.
- Soit h la fonction définie par $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
  Quelle que soit la valeur de x on peut calculer $2x^2 - 3x + 1$. Donc l'ensemble de définition de h est $\mathscr{D}_h = \mathbb{R}$.

Remarque : Parfois, l'énoncé restreint l'ensemble de définition d'une fonction. Dans l'exemple 5.2, la fonction f n'était définie, d'après l'énoncé, que sur $[-5; 7]$: c'est son ensemble de définition. Pourtant sans cette précision dans l'énoncé, on aurait pu calculer $f(x)$ pour n'importe quelle valeur réelle de x.

3. Représentation graphique

Définition 5.3 Dans un plan muni d'un repère, la courbe représentative de la fonction f définie sur D_f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x \in D_f$, et l'ordonnée y est l'image de l'abscisse x par f, c'est-à-dire que $y = f(x)$.
Cette courbe sera notée C_f, et l'on dira qu'elle a pour équation : $y = f(x)$.





Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)^2 - 5$.
Représentation graphique : Pour l'instant, on obtiendra cette courbe représentative à partir du tableau de valeurs, ou à l'aide d'un traceur de courbes (calculatrice ou ordinateur).

4. Parité d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Définition 5.4 On dit que f est :

- ***paire*** lorsque $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
- ***impaire*** lorsque $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Exemple La fonction carré est paire, et la fonction cube impaire.

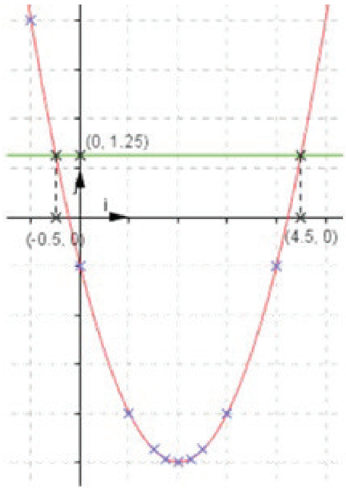
Propriété 5.1
- Si f est ***paire*** alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est ***impaire*** alors $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.

La réciproque de ces propriétés est vraie.

5. Résolution graphique

A. Résolution graphique d'équations

Exemple : (avec la même fonction f que dans l'exemple ci-dessus ; on prend pour unité le cm) :
Pour résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1,25$, on trace la droite qui correspond à $y = 1,25$ (horizontale), et on lit l'abscisse des points où cette droite croise la courbe représentative de f.
Les points d'intersection ont pour abscisse-0,5 et 4,5 ;
on a donc l'ensemble des solutions : $S = \{-0,5; 4,5\}$

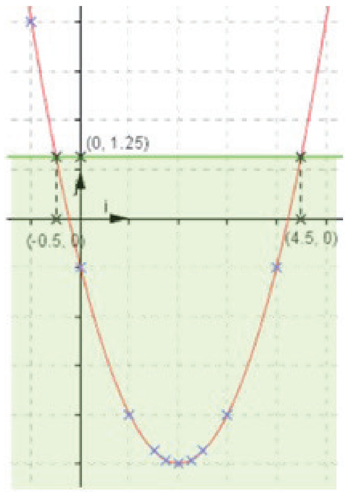


B. Résolution graphique d'inéquations

Exemple : En conservant le même exemple, on peut résoudre l'inéquation : $f(x) < 1,25$.
On a tracé la droite qui correspond à $y = 1,25$ (horizontale), et on lit l'abscisse des points où la courbe représentative de f est (strictement) en-dessous de cette droite.
On obtient $S =]-0,5; 4,5[$.

De même, les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 1,25$ sont les abscisses des points pour lesquels la courbe représentative de f est au-dessus de cette droite (ou la croise).
$S =]-\infty; -0,5] \cup [4,5; +\infty[$.

(pour la signification du symbole "$\cup$", voir ci-dessous.)



Généralisation : Pour résoudre une inéquation du type $f(x) < g(x)$, on regarde les abscisses des points pour lesquels la courbe représentative de f est en-dessous de celle de g.

C. Algorithmes

Le mot algorithme vient du nom de l'auteur persan **Al-Khuwarizmi** qui a écrit en langue arabe le plus ancien traité d'algèbre "abrégé de calcul par la complétion et la simplification" dans lequel il décrivait des procédés de calcul à suivre étape par étape pour résoudre des problèmes ramenés à des équations : ces procédés sont des **algorithmes**.
On définit parfois les algorithmes de la manière suivante : *"un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat et cela indépendamment des données"*. Le résultat doit donc s'obtenir en un temps fini.

Premier exemple : On souhaite écrire un algorithme décrivant la façon de calculer l'image d'un nombre par la fonction $f : x \mapsto 2x - 7$.
Second exemple : On souhaite déterminer si un nombre x est un antécédent d'un nombre y par la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 - 5$.

Entrées :
Saisir x;
début
    Calculer le double de x;
    Retirer 7;
    Afficher le résultat;

Algorithme 4 : Calcul d'une image

Entrées :
Demander le nombre x;
Demander le nombre y;
début
    Calculer le carré de x;
    Multiplier par 2;
    Retirer 5;
    Nommer z ce dernier résultat;
    si $y = z$ **alors**
        Afficher « Oui x est un antécédent de y » ;
    sinon
        Afficher « Non x n'est pas un antécédent de y » ;

Algorithme 5 : x est un antécédent de y ?

6. Synthèse sur les fonctions

Tout d'abord, vérifier s'il y a des valeurs interdites.

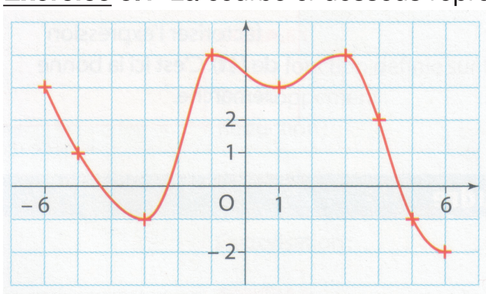
$$\begin{array}{cccccc} f & : & D_f & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & y = f(x) \end{array}$$

x : antécédent, "entrée", abscisse.
Pour calculer $f(5)$ par exemple, remplacer x par 5 dans l'expression de $f(x)$.

$y = f(x)$: image, "sortie", ordonnée.
Pour calculer le/les antécédent(s) de 5, résoudre l'équation $f(x) = 5$.

7. Énoncés des exercices

Exercice 5.1 La courbe ci-dessous représente une fonction f.



a) Lire graphiquement l'ensemble de définition de f.

b) Lire graphiquement les images par f de : -5 ; 3 ; 6.

c) Lire graphiquement les antécédents par f de : 4 ; -1 ; 3.

Exercice 5.2 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = -3(t-1)^2$$

a) Calculer l'image de 2

b) Calculer $f(-3)$
c) Est-il vrai que 4 n'admet pas d'antécédent par f ?
d) Est-il vrai que 0 admet un seul antécédent par f ?
e) Déterminer un antécédent de -12

Exercice 5.3 f est la fonction définie sur $]-2;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$

a) Expliquer pourquoi f n'est pas définie en -2
b) Calculer $f(4)$
c) Déterminer un antécédent de $\frac{1}{2}$

Exercice 5.4 On donne plusieurs expressions d'une même fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Forme 1 : $f(x) = 4(x-5)^2 - 9$
Forme 2 : $f(x) = (2x-13)(2x-7)$
Forme 3 : $f(x) = 4x^2 - 40x + 91$

1) Développer les formes 1 et 2 ; vérifier que l'on obtient la forme 3.

2) Quelle est la forme factorisée de $f(x)$?

3) Dans chaque situation, choisir la forme la plus appropriée pour répondre à la question posée :
a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
b) Calculer $f(0)$
c) Déterminer les antécédents de -9
d) Calculer l'image de $\sqrt{2}$
e) Résoudre l'équation $f(x) = 91$

Exercice 5.5 On réchauffe doucement un glaçon et on mesure l'évolution de sa température en fonction du temps. A l'instant t en secondes, on associe la température $f(t)$ de la matière observée (glace ou eau) en degrés Celsius.
On a relevé les températures suivantes :

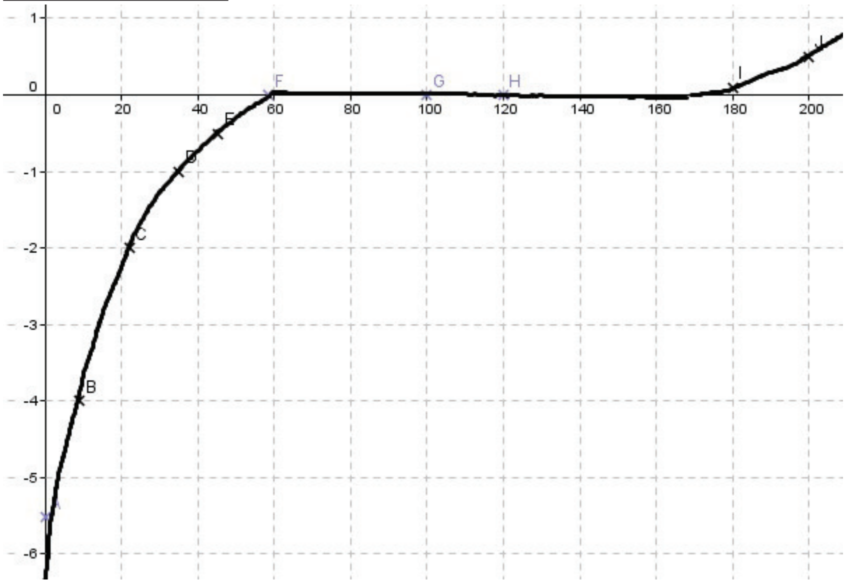
t	0	9	22	35	45	58
$f(t)$	-5,5	-4	-2	-1	-0,5	0

t	100	120	160	180	200	220
$f(t)$	0	0	0	0,1	0,5	1

a) Tracer une courbe pouvant représenter f (unités : 1cm pour 20 secondes et 1cm pour 1 degré Celsius).

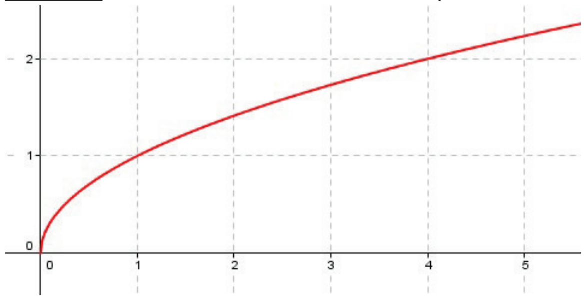
b) Pendant combien de secondes la température reste-t-elle comprise entre -0,5 et +0,5 degré ?

Correction du 03.E :



(à raccorder au point (220 ;1)...)

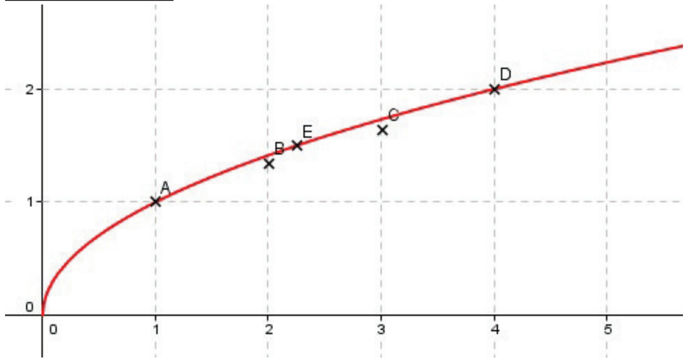
Exercice 5.6 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$.



a) Parmi les points suivants, quels sont ceux dont on peut affirmer qu'ils appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$?
O(0 ;0) ; A(1 ; 1) ; B(2 ; 1,4) ; C(0 ; 1,7) ; D(4 ; 2) ; E(2,25 ; 1,5)

b) Sachant que f est définie par $f(x) = \sqrt{x}$, dire, par le calcul, si chacun des points précédents appartient ou non à la courbe $\mathscr{C}$.

Corrigé du 03.F :



Exercice 5.7 Dans chaque cas, déterminer la parité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = x^3 - 1$
2. $f(x) = x^2 + 1$
3. $f(x) = -5x^2 + 3x^4$
4. $f(x) = 2x - 4x^3$
5. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$
6. $f(x) = (x+5)^2$

Exercice 5.8 Pour évaluer la hauteur d'une falaise en montagne, les *base jumpers* ("sauteurs de falaise") ont pour technique de lancer une pierre du haut de la falaise et d'écouter son écho lorsque celle-ci touche le sol.
Suivant le temps écoulé entre le lâcher de la pierre et le son de la chute, ils déduisent la hauteur de la falaise.
En négligeant les frottements de l'air et la vitesse du son lors d'une chute libre, la relation entre la hauteur de chute h en mètres et le temps de chute t en seconde est $h = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \simeq 9,8 m.s^{-2}$.

1. Exprimer t en fonction de g et h.
2. Déterminer par le calcul le temps correspondant à une hauteur de $50m$ puis de $100m$.
3. Déterminer par le calcul la hauteur correspondant à une chute de 1 seconde, 4 secondes, puis 7 secondes.
4. Sachant que la vitesse du son est de $340m.s-1$ et que, dans ce cas, $T =$ (Temps de la chute) + (Temps pour que le son remonte la falaise), déterminer, à l'aide de la calculatrice, la hauteur de la falaise lorsque $T = 7$ secondes. Comparer avec le résultat précédent.

Exercice 5.9 f est la fonction définie sur $[-4;6]$ par :

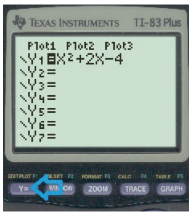
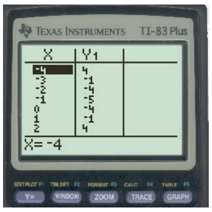
$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

a)Faire afficher par la calculatrice une table des valeurs de $f(x)$ pour x allant de -4 à 6 avec un pas de 1.

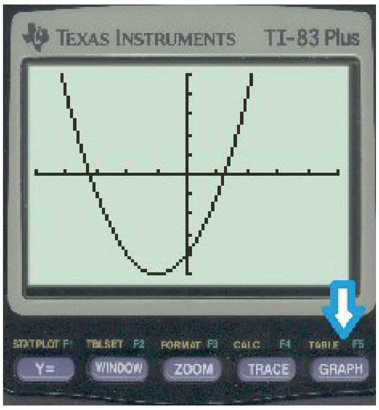
b) Donner deux antécédents de -1 par f.

c) Question supplémentaire : faire tracer le graphe de f à la calculatrice.

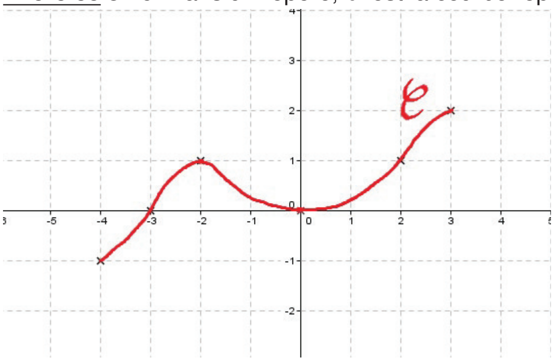
Corrigé du 03.G : a)

Utiliser le menu "$Y=$", et sur la 1ère ligne devant "$Y_1=$" entrer X^2+2X-4	Taper "2nde" puis "Tblset" (touche "Window"), régler le max et le min pour X, ainsi que le pas	Taper "2nde" puis "Table" (touche "Graph") pour afficher le tableau de valeurs ; déplacer le curseur pour aller jusqu'à $X=6$.
		

c)
Appuyer sur "GRAPH",

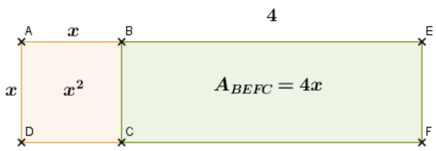


Exercice 5.10 Dans un repère, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle [-4 ;3].

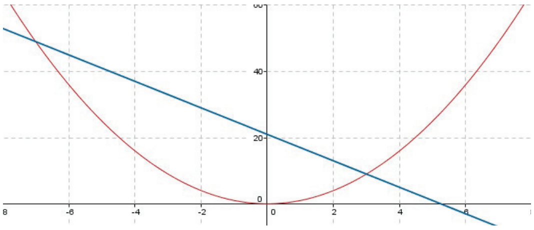


Résoudre graphiquement les équations :
a) $f(x)=2$; b) $f(x)=1$; c) $f(x)=0$;
d) $f(x)=-1$; e) $f(x)=-2$

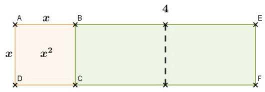
Exercice 5.11 1) Le mathématicien arabe Al-Khuwarizmi cherchait la longueur x telle que l'aire du rectangle AEFD ci-dessous soit égale à 21.

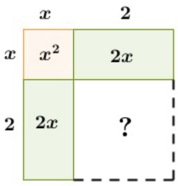


a) Vérifier que 3 est solution de l'équation $x^2=-4x+21$.
b) Voici les courbes d'équations $y=x^2$ (rouge) et $y=-4x+21$ (bleue). Sachant que la fenêtre montre les valeurs de x dans l'intervalle $[-8;+8]$, proposer une résolution graphique de cette équation.



Valider par le calcul les solutions proposées.
c) Pour résoudre son problème, al-Khuwarizmi a eu l'idée de découper BEFC en deux rectangles de mêmes dimension (x et 2) et de former le grand carré ci-dessous.
Recopier et compléter l'égalité : $x^2+4x=(x+2)^2-...$



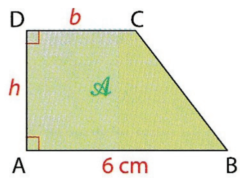


d) En déduire la résolution algébrique de l'équation, et le nombre de solutions du problème de al-Khuwarizmi.
2) En utilisant l'égalité de la question 1.c, résoudre algébriquement les équations :
a) $x^2=-4x+3$;
b) $x^2+4x=-1$;
c) $x^2+4x=-5$

8. Sujet de devoir maison

. DM05 : Une fonction à deux variables

ABCD est un trapèze rectangle en A et D tel que $AB=6cm$ et $CD<AB$.
On note b la longueur CD, h la hauteur du trapèze (en cm), et $\mathscr{A}$ son aire (en cm).



1) Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ en fonction de b et de h.
2) Dans chacun des cas suivants, construire un trapèze vérifiant les conditions données et calculer $\mathscr{A}$.
a) $b=2$ et $h=5$ **b)** $b=3,5$ et $h=4$ **c)** $b=5,2$ et $h=3,5$
3) A quels intervalles respectifs I et J doivent appartenir b et h ?
4) A chaque couple $(b;h)$, avec b dans I et h dans J, on associe une valeur unique de l'aire $\mathscr{A}$ du trapèze.
On définit ainsi une fonction f à deux variables : $f:(b;h)\mapsto\mathscr{A}$.
4.a) Calculer $f(2;3)$, c'est-à-dire l'aire du trapèze de base $b=2$ et de hauteur $h=3$.
Calculer de même $f(2;4)$, $f(4;3,6)$, $f(5;3,6)$.
4.b) On pose $h=2$. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à b associe $\mathscr{A}$.
4.c) On pose $b=4$. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction qui à h associe $\mathscr{A}$.